EXERCICE N°1 : 25' 4 points

Exercice 5 (3 points)

1) Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = 0$.

2) Soit E l'ensemble des fonctions définies et deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$, où f' désigne la fonction dérivée de f.

a) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \cos x$.
Vérifier que g est un élément de E.

b) Soit f un élément de E . Vérifier que, pour tout réel x , $f''(x) = f'(\frac{\pi}{2} - x)$.

c) En déduire que si f est un élément de E alors f est une solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$.

d) Déterminer alors l'ensemble E.

EXERCICE N°2 : 25' 4 points

Pour une série (x_i, y_i) avec $(1 \le i \le 15)$ à deux variables , la méthode des moindres carrés a permit de trouver : L'équation d
la droite (D) de régression de y par rapport à x. $D : y = 0,37x + 12,59$

L'équation de la droite (D') de régression de x par rapport à y . $D' : x = 0,9y + 14,07$

1. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire de cette série
2. Déterminer les coordonnées du point moyen G associé à cette série
3. On suppose que $\sum_{i=1}^{15} x_i^2 = 25205$. Calculer : Cov (x , y) ; $\sum_{i=1}^{15} x_i y_i$ et $\sum_{i=1}^{15} y_i^2$

EXERCICE N°3 : 15' 4 points

Soit le réel $A = \int_0^1 e^x \sin(\pi x)\, dx$

1) En utilisant deux intégrations par parties successives, montrer que : $A = \pi(e + 1) - \pi^2 A$
2) En déduire la valeur de A.